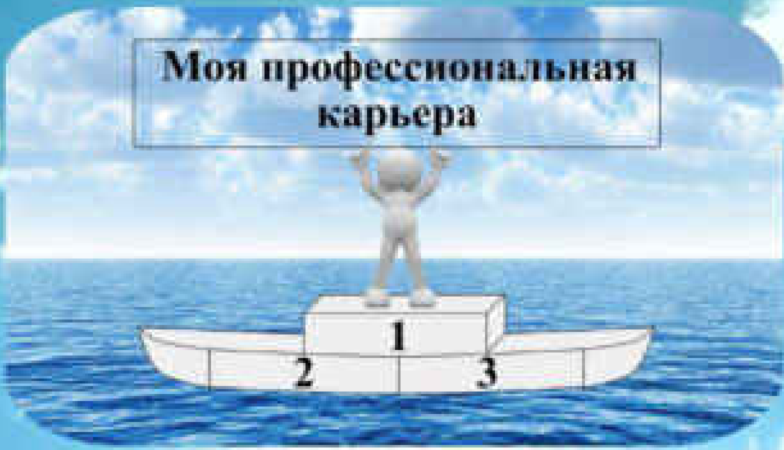
mpcareer@mail.ru

http://mpcareer.ru



Научно-практический электронный журнал

МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА

ISSN 2658-7998

9 772658 799001 >

Выпуск №78 (том 1)
(ноябрь, 2025)

Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА»

Сайт: mpcareer.ru

ISSN 2658-7998

УДК 001

ББК 94

Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). Дата выхода в свет: 30.11.2025.

Сборник содержит научные статьи отечественных и зарубежных авторов по экономическим, техническим, философским, юридическим и другим наукам.

Информация об опубликованных статьях предоставляется в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) и размещена на платформе научной электронной библиотеки (eLIBRARY.RU). **Лицензионный договор № 284-07/2019 от 30 июля 2019 г.**

Миссия научно-практического электронного журнала «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА» состоит в поддержке интереса читателей к оригинальным исследованиям и инновационным подходам в различных тематических направлениях, которые способствуют распространению лучшей отечественной и зарубежной практики в интернет пространстве.

Целевая аудитория журнала охватывает представителей экспертного сообщества, докторов, преподавателей, научных сотрудников, бакалавров, магистрантов, аспирантов и иных лиц, интересующихся вопросами, освещаемыми в журнале.

Материалы публикуются в авторской редакции. За соблюдение законов об интеллектуальной собственности и за содержание статей ответственность несут авторы статей. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов статей. При использовании и заимствовании материалов ссылка на издание обязательна.

Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА» | http://mpcareer.ru | mpcareer@mail.ru

УДК 51

Umarov X.R.,
Guliston davlat universiteti katta o'qituvchisi
Dodobayev A.M.,
TKTI Yangiyer filiali katta o'qituvchisi
Abdurasulov O.U.,
Guliston davlat universiteti talabasi

O'LCHOVLI FUNKSIYALAR FAZOSI UCHUN DUALLIK PRINSIPI

Annotatsiya: Ushbu ishda o'lchovli funksiyalar va ketma-ketliklarning Lebeg fazolari – $L^p(T,\Sigma,\mu)$ fazolardagi va ketma-ketliklarning l^p fazolardagi funksionallarning umumiy ko'rinishi aniqlanadi.

Kalit so'zlar: Lebeg fazolari, o'lchovli funksiya, funksional, qo'shma fazo, o'z-o'ziga qo'shma fazo, izomorf, F.Riss, Shteyngaus, N.Danfort, D.Gilbert.

Lebeg fazolari – bu normalangan fazo bo'lib, u ushbu $\|x\| = \left[\int\limits_T |x(t)|^p d\mu\right]^{1/p} < \infty$, $1 \le p < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi $x \in S(T,\Sigma,\mu)$ o'lchovli funksiyalardan iborat [1]. O'lchovli funksiyalar L^p $(1 < p < \infty)$ fazolar fanga birinchi marta F.Riss tomonidan (1910 y.), L^1 fazo esa Shteyngaus tomonidan kiritilgan. "Lebeg fazosi" atamasi esa fanga keyinchalik N.Danfort va Shvarts ishlari orqali kirib keldi.

Ma'lumki, barcha o'lchovli funksiyalar fazosi – $S(T,\Sigma,\mu)$, $T = N$, Σ – natural sonlar to'plamining barcha qism to'plamlari sistemasi va ixtiyoriy nuqtaning μ o'lchovi birga teng, bo'lgan holda barcha ketma-ketliklar sinfi $-s$ ga aylanadi. Ushbu qaralayotgan holda $L^P(T,\Sigma,\mu)$ fazo l^P kabi belgilanadi. l^p fazolar fanga birinchi marta F.Riss tomonidan, l^2 fazo esa avvalroq D.Gilbert tomonidan kiritilgan.

1. l^p fazodagi funksionalning umumiy ko'rinishi. Avval xususiy hol bo'lgan ketma-ketliklar fazosiga qisqacha to'xtalib o'tamiz. Ushbu tasdiqni isbot qilamiz.

Tasdiq. $1 \le p < \infty$ va $1/p + 1/q = 1$ bo‘lsin. l^p fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}, \quad x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p,$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} - l^q$ dagi ixtiyoriy element. Shuningdek,

$$\|f\| = \|y\|_{l^q}.$$

Isboti. Endi ℓ_p fazoni qaraymiz. Ma’lumki, bu fazo

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = \{x_n\}$ ketma-ketliklardan iborat va unda x elementning normasi

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar biz $q > 1$ sonni $1/p + 1/q = 1$ munosabatdan aniqlasak, u holda ℓ_p^* fazo ℓ_q fazoga izomorf bo‘ladi. Buni isbotlash uchun ℓ_q fazoning ixtiyoriy $f = \{f_n\}$ elementi yordamida ℓ_p fazoda

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot x_n \qquad (1)$$

chiziqli funksionalni aniqlaymiz. Dastlab, (1) tenglikning o‘ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Ma’lumki, ixtiyoriy n natural son uchun

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i \cdot x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \| x \|_p \qquad (2)$$

o‘rinli. Birinchi tengsizlikni yozishda biz Gyolder tengsizligidan foydalandik. Bu erdan (1) tenglikning o‘ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi hamda $\tilde{f}$ funksional uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| = \sum_{i=1}^{\infty}\left|f_i \cdot x_i\right| \le \| f \|_q \cdot \| x \|_p, \quad \| \widetilde{f} \| \le \| f \|_q .$$

Demak, (1) tenglik bilan aniqlangan $\widetilde{f}$ funksional chiziqli va uzluksiz. Agar $x_f \in \ell_p$ elementning hadlarini

$$x_i = \overline{f_i} \cdot |f_i|^{q-2}, \quad i \in \{1,2,\ldots,\infty\}$$

(agar $f_i = 0$ bo‘lsa, $x_i = 0$ deb olinadi) ko‘rinishda tanlasak, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$x_i \cdot f_i = |f_i|^q \ge 0, \; x_i \cdot f_i = |x_i|^p \ge 0, \quad i \in \{1,2,\ldots,\infty\} .$$

Biz $x_f \in \ell_p$ va $f = \{f_i\} \in \ell_q$ ekanligini hisobga olsak,

$$\left|\widetilde{f}(x_f)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \| f \|_q \cdot \| x \|_p .$$

Demak,

$$\| \widetilde{f} \|_q = \| f \|_q .$$

Ko‘rsatish mumkinki, ℓ_p fazodagi ixtiyoriy $\widetilde{f}$ chiziqli uzluksiz funksional (1) ko‘rinishda tasvirlanadi.

Shunday qilib ℓ_p^* va ℓ_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ fazolarning izomorfligi isbotlandi. Xususan, $p = 2$ da $\ell_2^* = \ell_2$ kelib chiqadi. Shuning uchun ℓ_2 fazo o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo deyiladi. Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, ixtiyoriy Gilbert fazosining qo‘shmasi ham o‘ziga izomorf bo‘ladi.

Endi c_0 fazoni qaraymiz. $(c_0)^* = l^1$ ekanlini isbotlaymiz. Bu tenglikni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

Tasdiq. c_0 fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}, \quad x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_0, \quad (3)$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} - l^1$ dagi ixtiyoriy element. Shuningdek,

$$\|f\| = \|y\|_{l^1}.$$

Isboti. Ma'lumki, c_0 fazoda (A) shart bajariladi, u holda (3) formula funksionalning umumiy ko'rinishini beradi. $f \in (c_0)^*$ va $\widetilde{x} = \{\widetilde{\xi}_k\}_{k=1}^{\infty}$, bu erda

$$\widetilde{\xi}_k = \begin{cases} \operatorname{sign} \eta_k, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases},$$

bo'lsin. Ravshanki, $\widetilde{x} \in c_0$ va $\|\widetilde{x}\| \le 1$, u holda

$$f(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| \le \|f\|.$$

$n \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \le \|f\|,$$

ya'ni $y \in l^1$ va $\|y\|_{l^1} \le \|f\|$ bo'ladi.

Agar $y \in l^1$ bo'lsa, u holda

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \right| \le \max|\xi_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \le \|y\|_{l^1} \cdot \|x\|.$$

Bundan ko'rinadiki, f –chiziqli funksional va $\|f\| \le \|y\|_{l^1}$. Demak, $\|f\| = \|y\|_{l^1}$.

Endi c fazoni qaraymiz. $(c)^* = l^1$ ekanlini isbotlaymiz. Bu tenglikni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

c fazo BIF emas. U holda c fazodagi uzluksiz funksionallarning umumiy ko'rinishini topish uchun boshqa yo'l tutish kerak bo'ladi.

c fazosida quyidagi vektorlarni aniqlaymiz:

$$e_0 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$$

$$e_k = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots \right), \quad k \in N.$$

Natijada har bir $x = (\xi_n) \in c$ elementni

$$x = \xi_0 e_0 + \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_0) e_n$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda $\xi_0 = \lim_{k \to \infty} \xi_k$.

Aytaylik, $f \in c^*$ bo‘lsin. U holda

$$f(x) = f(\xi_0 e_0) + f_0(x - \xi_0 e_0) = \eta_0 \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k (\xi_k - \xi_0)$$

bunda $\eta_0 = f(e_0)$ va $\eta_n = f(e_n)$, $n \in N$.

Endi $f(x)$ sonini boshqa ko‘rinishda ham yozish mumkin ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun ε_n sonlarni $\varepsilon_n = sign\, \eta_n$ ko‘rinishda aniqlaymiz. Har bir $m \in N$ sonini tayinlab, $x^{(m)} = (\tilde{\xi}_n) \in c$ nuqtani quyidagicha saylab olamiz:

$$\tilde{\xi}_n = \begin{cases} \text{sign } \eta_n, \ n \le m \\ 0, \ n > m \end{cases}.$$

U holda $\|x^{(m)}\| \le 1$. Natijada

$$\left|f(x^{(m)})\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} \tilde{\xi}_n \eta_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |\eta_n| \le \|f\|.$$

$m \in N$ ning ixtiyoriyligidan, $m \to \infty$ da limitga o‘tsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_k| \le \|f\| < +\infty,$$

kelib chiqadi, ya’ni $(\eta_n) \in l_1$. Demak, har bir $x = (\xi_n) \in c$ elementi uchun $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \xi_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi va

$$f(x) = \xi_0 \eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n. \qquad (4)$$

Demak, agar $f \in c^*$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $x = (\xi_n) \in c$ uchun (4) o‘rinli, bunda $\xi_0 = \lim_{k \to \infty} \xi_k$, $\eta_0 = const$ va $(\eta_n) \in l_1$. Yuqoridadek, $m \in N$ sonini tayinlab $x_m = (\xi_n) \in c$ nuqtani saylab olamiz:

$$\xi_n = \begin{cases} \varepsilon_n, \ n \le m \\ \varepsilon_0, \ n > m \end{cases} \quad (\varepsilon_n \text{ sonlari yuqorida aniqlandi}).$$

U holda $\|x\| \le 1$, $\xi_0 = \lim_{n \to \infty} \xi_n = \varepsilon_0$ va

$$f(x_m) = |\eta_0| + \sum_{n=1}^{m} |\eta_n| + \varepsilon_0 \sum_{n=m+1}^{\infty} \eta_n.$$

Bundan

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1}|f(x)| \ge |f(x_m)|$$

va $m \to \infty$ da

$$|\eta_0| + \sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n| \le \|f\|.$$

Har bir $y = \{\eta_k\} \in l^1$ element (4) formula yordamida c fazodagi biror uzluksiz chiziqli $f -$ funksionalni aniqlaydi va shu bilan birga

$$\|f\| = |\eta_0| + \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, $c^* \cong l_1$. Bu tenglikni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

Endi ℓ_1 fazoning qo‘shmasini topamiz. ℓ_1 fazoning qo‘shmasi $\ell_\infty = m$ - chegaralangan ketma-ketliklar fazosiga izomorf bo‘lishini ko‘rsatamiz, ya’ni $\ell_1^* = m$ tasdiqni isbotini keltiramiz. Bu tenglikni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ bo‘lsa, u holda

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \xi_i \ , \ x = (x_i) \in l_1 \qquad (5)$$

formula l_1 fazoda chiziqli funksionalni aniqlaydi.

f ning uzluksizligi

$$|f(x)| \le \sup_k |\xi_k| \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| = \|\xi\|_m \|x\|_{l_1},$$

ya’ni

$$\|f\| \le \|\xi\|_m \qquad (6)$$

tensizligidan kelib chiqadi.

Endi l_1 fazoda har bir uzluksiz chiziqli funksional (5) ko‘rinishda ekanligini isbotlaymiz.

l_1 fazosida quyidagi vektorlarni qaraylik:

$$e_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots\right), \ n \in N.$$

U holda $x=(x_n)\in l_1$ elementni

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i$$

ko‘rinishda yozish mumkin va $x^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ uchun

$$\left\|x^{(n)}-x\right\|=\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_i|\to 0.$$

$f\in l_1{}^*$ bo‘lsin. U holda

$$f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x_if(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\xi_i\ ,$$

bunda $\xi_i=f(e_i),\quad i\in N$.

$$|\xi_i|=|f(e_i)|\le\|f\|$$

dan $(\xi_i)\in m$. Demak,

$$\|\xi\|_m=\sup_k|\xi_k|\le\|f\|. \quad (7)$$

(6) va (7) dan $\|f\|=\|\xi\|$ kelib chiqadi, ya’ni $l_1{}^*\cong m$.

2. L^p fazodagi funksionallarning analitik ko‘rinishi

$X-(T,\Sigma,\mu)$ dagi IF va μ o‘lchov σ-chekli bo‘lsin. Agar X da aniqlangan f chiziqli funksional uchun, $x_n,x\in X$, deyarli hamma erda $x_n(t)\to 0$ va deyarli hamma erda $|x_n(t)|\le|x(t)|$ bo‘lishidan, $f(x_n)\to 0$ kelib chiqsa, f chiziqli funksional tartibli uzluksiz deb ataladi. X dagi barcha (o)-uzluksiz funksionallar to‘plami vektor fazo bo‘ladi, va uni $X_n^{\sim}$ orqali belgilaymiz.

Yuqoridagi nazariyani $L^p(T,\Sigma,\mu)$, (μ o‘lchov σ-chekli) fazolarga tatbiq qilamiz. ($1<p<\infty$ bo‘lganda μ o‘lchov σ-chekli bo‘lishi, umuman olganda, shart emas).

Tasdiq. $1\le p<\infty$ va $1/p+1/q=1$ bo‘lsin. $L^p(T,\Sigma,\mu)$ fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi

$$f(x)=\int_T x(t)\overline{y(t)}d\mu,\quad x\in L^p, \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $y-L^q(T,\Sigma,\mu)$ dagi ixtiyoriy element. Shuningdek,

$$\|f\| = \|y\|_{L^q}. \qquad (2)$$

Isboti. $L^p(T,\Sigma,\mu)$ fazoda (A) shart bajariladi. Unda, (1) formula chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishini beradi. (2) tenglikni isbotlaymiz.

Ma’lumki,

$$\|f\| = \|y\|_{L^q} = \begin{cases} \left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{1/q}, & 1 < p < \infty \\ \underset{t\in T}{vrai\sup}|y(t)|, & p = 1 \end{cases}$$

1) Dastlab $1 < p < \infty$ bo‘lgan holni qaraymiz. Gyolderning integral tengsizligidan

$$|f(x)| = \left|\int_T x(t)\overline{y(t)}d\mu\right| \le \left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{1/q} \cdot \left[\int_T |x(t)|^p d\mu\right]^{1/p} = \|y\|_{L^q}\|x\|$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Demak, $\|f\| \le \|y\|_{L^q}$.

Teskari tengsizlikni isbotlash uchun, ushbu funksiyani qaraymiz:

$$\widetilde{x}(t) = |y(t)|^{q-1}\operatorname{sign} y(t).$$

Unda $|\widetilde{x}(t)|^p = |y(t)|^{p(q-1)} = |y(t)|^q$. Demak, $\widetilde{x} \in L^p$ va

$$\|\widetilde{x}\| = \left[\int_T |\widetilde{x}(t)|^p d\mu\right]^{1/p} = \left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{p}} = \left[\|y\|_{L^q}\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\|f\| \ge f\left(\frac{\widetilde{x}}{\|\widetilde{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\widetilde{x}\|}\int_T \widetilde{x}(t)\overline{y(t)}d\mu = \frac{1}{\|\widetilde{x}\|}\int_T \widetilde{x}(t)\overline{y(t)}d\mu =$$

$$= \frac{1}{\|\widetilde{x}\|}\int_T |y(t)|^q d\mu = \left[\|y\|_{L^q}\right]^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \|y\|_{L^q}.$$

Demak, $\|f\| = \|y\|_{L^q}$.

2) Endi $p = 1$ bo‘lsin. Quyidagi belgilash bajaramiz:

$$\|y\|_{L^\infty} = \underset{t\in T}{vrai\sup}|y(t)| = Q.$$

Ravshanki, $\|f\| \le Q$ tengsizlik o‘rinli. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ songa ko‘ra, A bilan quyidagi to‘plamni belgilaymiz:

$$A = \{t \in T : y(t) > Q - \varepsilon\}.$$

Ta'kidlash lozimki, $\mu(A) > 0$. Quyidagi funksiyani aniqlaymiz:

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} \text{sign } y(t), t \in A, \\ 0 \quad , t \notin A. \end{cases}$$

Ravshanki, $\widetilde{x} \in L^1$ va $\|\widetilde{x}\| = \int_T |\widetilde{x}(t)| d\mu = \mu(A)$. Unda

$$\|f\| \geq f\left(\frac{\widetilde{x}}{\|\widetilde{x}\|}\right) = \frac{1}{\mu(A)} \int_T \widetilde{x}(t)\overline{y(t)} d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_T |y(t)| d\mu \geq$$

$$\geq \frac{1}{\mu(A)} \int_T |y(t)| d\mu \geq \frac{1}{\mu(A)} [Q - \varepsilon] \mu(A) = Q - \varepsilon .$$

ε ning ixtiyoriyligidan $\|f\| \geq Q$ kelib chiqadi. Demak, $\|f\| = \|y\|_{L^\infty}$.

$L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

Tasdiq. $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi

$$f(x) = \int_T x(t) d\varphi, \qquad (4)$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $\varphi -$ $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$ dagi ixtiyoriy element. Shuningdek,

$$\|f\| = \|\varphi\|.$$

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $y \in L^q \to f \in (L^p)^*$, (1) formula bilan aniqlangan, $\varphi \in \mathbf{ba} \to f \in (L^\infty)^*$, (4) formula bilan aniqlangan, akslantirishlar mos ravishda, L^q ning $(L^p)^*$ ga va **ba** ning $(L^\infty)^*$ ga izometriyasi bo'ladi. Demak, boshqacha qilib aytganda, L^q fazo L^p $(1 \leq p < \infty)$ fazoga qo'shma va $(L^p)^* = L^q$ kabi yoziladi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funksionalno'y analiz.* Moskva, «Nauka» 1984.
2. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. "*Funksional analiz va integral tenglamalar*", Toshkent, "EL PRESS", 2013.

3. Ochan Yu.S. "*Sbornik zadach po matematicheskomu analizu*". Moskva: Prosvehenie. 1981.

4. Trenogin V.A. *Funksionalno'y analiz*. «Nauka». M. 1980.

5. Zhamuratov K., Dodobayev A., Umarov X. Drainage of a Semi-infinite Aquifer in the Presence of Evaporation // International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology, AIP Conf. Proc. 3147, 030036-1 030036-6, https://doi.org/10.1063/5.0210201.

6. Жамуратов, К., Умаров, Х. Р., & Турдимуродов, Э. М. (2024). *О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором* (Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет)

7. Агафонов, А., Умаров, Х., & Душабаев, О. (2023). ДРЕНИРОВАНИЕ ПОЛУ БЕСКОНЕЧНОГО ВОДОНОСНОГО ГОРИЗОНТА ПРИ НАЛИЧИИ ИСПАРЕНИЯ. *Евразийский журнал технологий и инноваций*, *1*(6 Part 2), 99-104.

8. Narjigitov, X., Jamuratov, K., Umarov, X., & Xudayqulov, R. (2023). SEARCH PROBLEM ON GRAPHS IN THE PRESENCE OF LIMITED INFORMATION ABOUT THE SEARCH POINT. *Modern Science and Research*, *2*(5), 1166-1170.

9. Агафонов, А., Душабаев, О., & Умаров, Х. (2023). СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКЕ. *Евразийский журнал технологий и инноваций*, *1*(6 Part 2), 93-98.

10. Умаров, Х.Р. Решение задачи о притоке к математическому совершенному горизонтальному дренажу / Х.Р.Умаров, К.Жамуратов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – № 3 (8-4). – С. 303–307.

11. ЖАМУРАТОВ, К., УМАРОВ, Х. Р., & АЛИМБЕКОВ, А. Решение одной задачи движения грунтовых вод в области с подвижной границей при

наличии испарения. *НАУЧНЫЙ АЛЬМАНАХ Учредители: ООО" Консалтинговая компания Юком*, 81-84.

12. К Жамуратов, ФШ Исматуллаев Об автомодельном решении задачи нестационарного движения грунтовых вод вблизи водохранилища при наличии нелинейного испарения - Научный альманах, 2018

13. К Жамуратов, ХР Умаров ЧИСЛЕННОЕ И АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИНАМИКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНОГО ИСПАРЕНИЯ научных исследований XXI века: теория и практика, 2015.