mpcareer@mail.ru

http://mpcareer.ru

Научно-практический электронный журнал

МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА

ISSN 2658-7998
9 772658 799001 >

Выпуск №78 (том 1)
(ноябрь, 2025)

Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА»

Сайт: mpcareer.ru

ISSN 2658-7998

УДК 001

ББК 94

Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). Дата выхода в свет: 30.11.2025.

Сборник содержит научные статьи отечественных и зарубежных авторов по экономическим, техническим, философским, юридическим и другим наукам.

Информация об опубликованных статьях предоставляется в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) и размещена на платформе научной электронной библиотеки (eLIBRARY.RU). **Лицензионный договор № 284-07/2019 от 30 июля 2019 г.**

Миссия научно-практического электронного журнала «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА» состоит в поддержке интереса читателей к оригинальным исследованиям и инновационным подходам в различных тематических направлениях, которые способствуют распространению лучшей отечественной и зарубежной практики в интернет пространстве.

Целевая аудитория журнала охватывает представителей экспертного сообщества, докторов, преподавателей, научных сотрудников, бакалавров, магистрантов, аспирантов и иных лиц, интересующихся вопросами, освещаемыми в журнале.

Материалы публикуются в авторской редакции. За соблюдение законов об интеллектуальной собственности и за содержание статей ответственность несут авторы статей. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов статей. При использовании и заимствовании материалов ссылка на издание обязательна.

УДК 51

Умаров Х.Р.,
Гулистон давлат университети катта ўқитувчиси
Эгамбердиева С.Н.,
Гулистон давлат университети талабаси

АЙРИМ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИДАН ФОЙДАЛАНИШ

Аннотация: Ушбу мақолада жуда кўп соҳаларда муҳим ҳисобланган, ҳисоблаш мураккаб бўлган айрим хосмас интеграллар: Дирихле интеграли, Пуассон интеграли, Лаплас интеграллари, Френелли интеграллари, Лежандр интегралининг қийматларини чегирмалардан фойдаланган ҳолда ҳисобланилган.

Калит сўзлар: Дирихле интеграли, Пуассон интеграли, Лаплас интеграллари, Френелли интеграллари, Лежандр интеграли, махсус нуқта, чегирма.

КИРИШ

Маълумки, математик анализ курсидаги баъзи хосмас интегралларнинг қийматларини оддий усулларда ҳисоблаш бирмунча қийинчиликлар туғдириши мумкин. Аммо, чегирмалардан фойдаланган ҳолда бу интегралларнинг қийматларини осон ҳисоблаш мумкин. Ушбу ишда айрим ҳисоблаш мураккаб бўлган хосмас интегралларнинг қийматлари чегирмалар назариясидан фойдаланган ҳолда ҳисоблаб келтирилган. Бундан кўзланган асосий мақсад баъзи ҳисоблаш мураккаб бўлган интегралларнинг қийматларини чегирмалардан фойдаланган ҳолда ҳисоблаш ва интегралларни ҳисоблашда қулайлик туғдирадиган йўлларни ҳамда чегирмалар назарияси ва унинг татбиқларини ўрганиш, улардан амалиётда фойдалана олиш кўникма ва малакасини шакллантириш.

Адабиётлар таҳлили ва методологияси

Ҳозирги вақтда чегирмалар назарияси математиканинг турли бўлимларида қўлланилмоқда [3]. чегирмалар назарияси ҳақидаги батафсил ва систематик тартибли маълумотлар [1] ва [2] адабиётларда келтирилган. Мазкур иш учун чегирмалар назарияси татбиқларини ўрганиш методологик асос бўлади.

НАТИЖАЛАР

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ **кўринишдаги хосмас интегралларни ҳисоблаш.**

Айтайлик, x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлган $R(x)$

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

бўлиб, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар мос равишда n ва m даражали кўпҳадлар, ва $m - n \geq 2$ бўлсин. $R(x)$ функция ҳақиқий ўқда қутб нуқтага эга бўлмасин.

Маркази координаталар бошида радиуси R бўлган айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми C ҳамда ҳақиқий ўқнинг $[-R, R]$ кесмасидан ташкил топган γ_R ёпиқ эгри чизиқни оламиз. (3-чизма)

Равшанки,

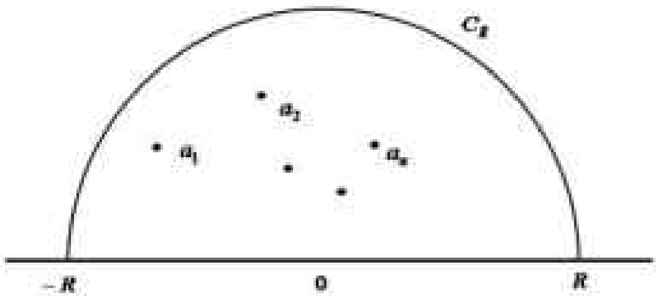
$$\gamma_R = [-R, R] \cup C.$$

Сўнг

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

рационал функцияни қараймиз.

Энди R радиусни шундай катта қилиб оламизки, $R(z)$ функциянинг барча юқори ярим текисликдаги махсус нуқталари шу γ_R ёпиқ эгри чизиқ ичида жойлашсин.



3-чизма.

Чегирмалар ҳақидаги теоремага кўра [1]

$$\int_{\gamma_R} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \underset{z=z_k}{res} R(z) \qquad (1)$$

бўлади. Бу ерда $z_1, z_2, \dots, z_p$ лар $R(z)$ функциянинг γ_R ёпиқ эгри чизиқ ичидаги махсус нуқталари (қутб нуқталари).

Равшанки,

$$\int_{\gamma_R} R(z)dz = \int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C} R(z)dz \qquad (2)$$

бўлади. Чегирмалар ҳақидаги теоремага [1] асосан ва интеграл хоссасидан

$$\int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \underset{z=z_k}{res} R(z) \qquad (3)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдаги

$$\int_{C} R(z)dz$$

интегрални баҳолаймиз.

Агар

$$|R(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{a_n z^n}{b_m z^m}\left[\frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m z} + \dots + \frac{b_1}{b_m z^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m z^m}}\right]\right| = \left|\frac{a_n}{b_m z^{m-n}}\right| \cdot \left|\frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m z} + \dots + \frac{b_1}{b_m z^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m z^m}}\right|$$

ҳамда $m-n\geq 2$ бўлишини эътиборга олсак, унда R нинг етарлича катта қийматларда

$$|R(z)|<\frac{K}{R^2} \qquad (K=const)$$

бўлишини топамиз. Натижада

$$\int_C |R(z)|dz<\frac{K}{R^2}\pi R=\frac{K\pi}{R}$$

бўлади. Бундан (3) муносабатда

$$\lim_{R\to\infty}\int_C R(z)dz=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқоридаги тенгликдан $R\to\infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\underset{z=z_k}{res}\,R(z). \qquad (4)$$

Демак, $R(z)$ функция юқорида айтилган шартларни қаноатлантирса, унда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$$

интеграл $R(z)$ функциянинг юқори ярим текисликдаги барча махсус нуқталаридаги чегирмалар йиғиндисини $2\pi i$ га кўпайтирилганига тенг экан [2]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k\geq 0}\underset{z=z_k}{res}\,R(z).$$

1-мисол. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки,

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$$

функция учун $z=i$ нуқта юқори ярим текисликда жойлашган иккинчи тартибли қутб нуқта бўлади. Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=2\pi i\,\underset{z=i}{res}\frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Энди функциянинг чегирмасини ҳисоблаймиз:

$$\underset{z=1}{res}\frac{1}{(z^2+1)^2}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+i)^2}\right]=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=-\frac{2}{8i^3}=-\frac{1}{4}i.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=2\pi i\left(-\frac{1}{4}i\right)=\frac{\pi}{2}$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+a^2}$ Лаплас интегралини ҳисоблаш учун биз

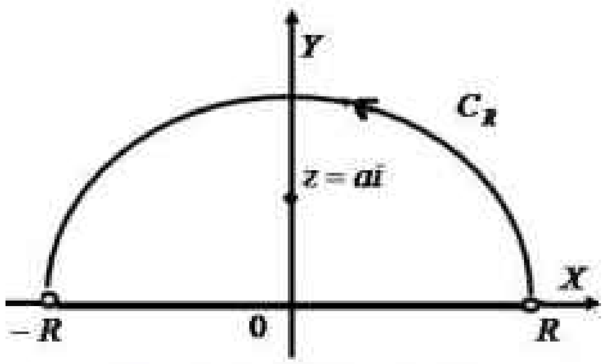
$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$

ёрдамчи функциядан ва 4-чизмадаги контурни танлаб оламиз. C_R да

$$g(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$$

функция $|g(z)|<\frac{1}{R^2-a^2}$ тенгсизликни қаноатлантиради ва (у Жордан леммаси бўйича) $R\to\infty$ да 0 га текис интилади. У ҳолда Жордан леммасига кўра

$$\int_{C_R} f(z)dz=\int_{C_R} g(z)e^{iz}dz\to 0$$



4–чизма. Ярим айлана контури.

Ихтиёрий $R > 0$ учун чегирмалар ҳақидаги теоремага асосан

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}dx}{x^2 + a^2} + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ai}$$

га эга бўламиз. Бу тенгликда $R \to \infty$ да лимитга ўтсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Интеграл остидаги функциянинг ҳақиқий қисмини ажратиб, унинг жуфтлигидан фойдалансак

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos xdx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

3-мисол. Қуйидаги

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = si\infty \qquad (5)$$

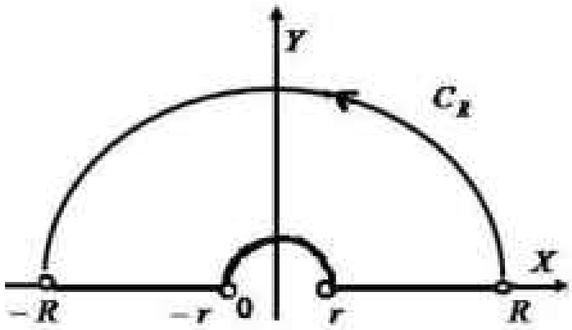
Дирихле интегралини ҳисоблаш учун биз

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

ёрдамчи функцияни оламиз. Интеграллаш контурини 5-чизмадаги кўрсатилганидек танлаб оламиз. $z = 0$ нуқта c_r кичкина ярим айланани айланиб чиқади ёки бу $f(z)$ нинг махсус нуқтасидир.

Коши теоремасига асосан қуйидаги тенглик ўринли бўлади.

$$\int_{-R}^{-r} f(z)dz + \int_{c_r} f(z)dz + \int_{r}^{R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$



5-чизма. Ярим айлана контури

Жордан леммасидан кўриниб турибдики,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

$\int_{c_r} f(z)dz$ ни баҳолаш учун биз $z=0$ атрофида $f(z)$ нинг Лоран ажралишини кўриб ўтамиз: бу ажралиш қуйидаги кўринишда

$$f(z) = \frac{1+iz+\frac{(iz)^2}{2}+\dots}{z} = \frac{1}{z}+P(z)$$

бўлади. Бу ерда $P(z)$ – $z=0$ да узлуксиз бўлган функция. Бу ердан кўриниб турибдики

$$\int_{c_r} f(z)dz = \int_{c_r}\frac{dz}{z} + \int_{c_r} P(r)dz = \int_{\pi}^{0}\frac{re^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -\pi + O(r).$$

Бундай ҳолда Коши теоремасини

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}dx}{x} + \int_{r}^{R}\frac{e^{ix}dx}{x} = i\pi + O(r) + O(\frac{1}{R}).$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Биринчи интегралдаги x ни $-x$ га айлантирганда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x}dx$$

га тенглиги ва буни иккинчи интеграл билан бирлаштирсак, биз

$$\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx = i\pi + O(r) + O(\frac{1}{R})$$

га эга бўламиз. $r \to 0$ ва $R \to \infty$ да лимит

$$si\infty = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad (6)$$

лигини оламиз.

Кейинги мисолларимизда кўрсатгичли функцияларни ўзида мужассам этган интегрални ҳисоблашни келтириб ўтамиз.

4-мисол. Қуйидаги $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}dx}{1+e^x}$ интегрални ҳисоблаш учун биз

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

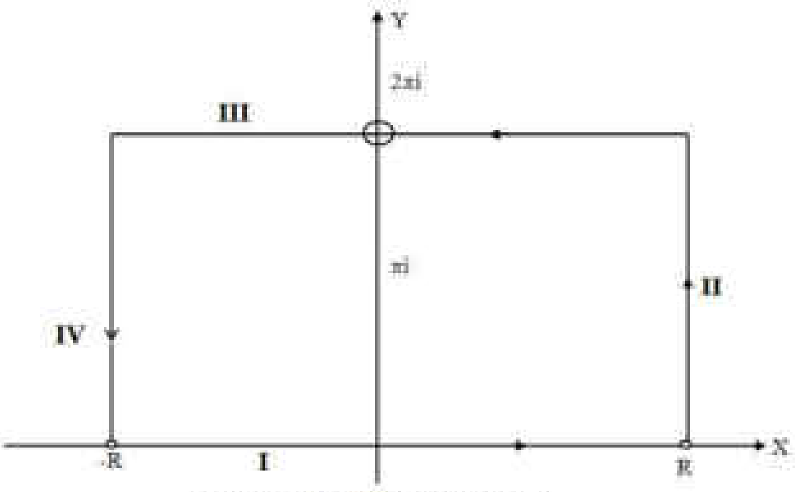
функцияни қарайлик. z $2\pi i$ мавҳум айланишга эга бўлган хоссасидан у $e^{2\pi i a}$ ўзгармас кўпҳадга кўпаяди. 6-чизмада кўрсатиб қўйилган тўғри бурчак контури бўйича $f(z)$ ни шунга мос интеграллаймиз. Буни ичида $f(z)$ $c_{-1} = -e^{a\pi i}$ чегирма билан биринчи тартибли $z = \pi i$ қутбга эга бўлади. Демак, чегирмалар ҳақидаги теорема бўйича

$$\int_I \frac{e^{az}dz}{1+e^z} + \int_{II} \frac{e^{az}dz}{1+e^z} + \int_{III} \frac{e^{az}dz}{1+e^z} + \int_{IV} \frac{e^{az}}{1+e^z} = -2\pi i e^{a\pi i}$$

бўлади.

$$\int_I \frac{e^{az}dz}{1+e^z} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}dx}{1+e^x}, \quad \int_{III} \frac{e^{az}dz}{1+e^z} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}dx}{1+e^x}$$

ларга эгамиз.



6-чизма. Тўртбурчак контур

II ва IV кесмаларга мос

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \le \frac{e^{aR}}{e^{R}-1} = \frac{e^{(a-1)R}}{1-e^{-R}},$$

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right| \le \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}.$$

Демак, $0 < a < 1$ бўлса унда $R \to \infty$ да иккала $\int_{II} \frac{e^{az}dz}{1+e^{z}}$ ва $\int_{IV} \frac{e^{az}dz}{1+e^{z}}$ интеграл ҳам 0 га интилади.

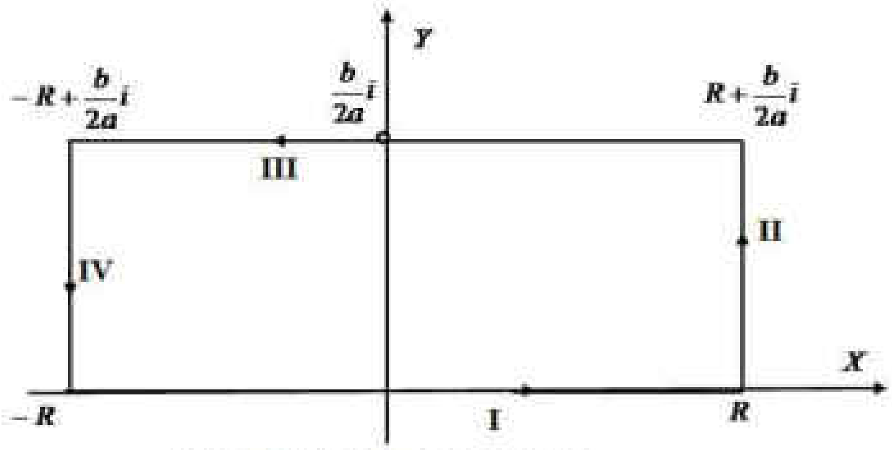
Шундай қилиб, $0 < a < 1$ да

$$\left(1-e^{2a\pi i}\right)\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}} + O(\frac{1}{r}) = -2\pi i e^{a\pi i})$$

бўлади ва $R \to \infty$ даги лимитдан изланаётган интегралимизга эга бўламиз.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx = \pi\frac{2i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, \quad (0<\alpha<1) \quad (7)$$

5-мисол. $\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos bxdx$ Пуассон интегралини ҳисоблаш учун $f(z) = e^{-az^2}$ функцияни қараймиз ва унинг ҳақиқий ўқдаги интеграли машҳур натижа $\left(erf\infty = 1\right)$ асосида ҳисобланади, $y = h$ тўғри чизиқда эса у



7-чизма. Тўртбурчак контури

$$e^{-a(x+ih)^2} = e^{ah^2}\cdot e^{-ax^2}(\cos 2ahx - i\sin 2ahx)$$

функцияга айланади, $h=\dfrac{b}{2a}$ бўлган ҳолда ҳақиқий қисми ўзгармас кўпҳадли интеграл ости функциядан фарқ қилади. Бунга мос ҳолда биз 7-чизмада кўрсатилганидек интеграллаш контурини танлаб оламиз. Коши теоремасига асосан

$$\int_I e^{-ax^2}dx+\int_{II} e^{-ax^2}dx+\int_{III} e^{-ax^2}dx+\int_{IV} e^{-ax^2}dx=0 \qquad (8)$$

бўлади. Бу ерда

$$\int_I e^{-ax^2}dx=\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx=\frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^{R\sqrt{a}} e^{-t^2}dt\,,\qquad \int_{III} e^{-ax^2}dx=-e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}e^{-ibx}dx$$

II ва IV кесмаларда $x=\pm R$ бўлганда

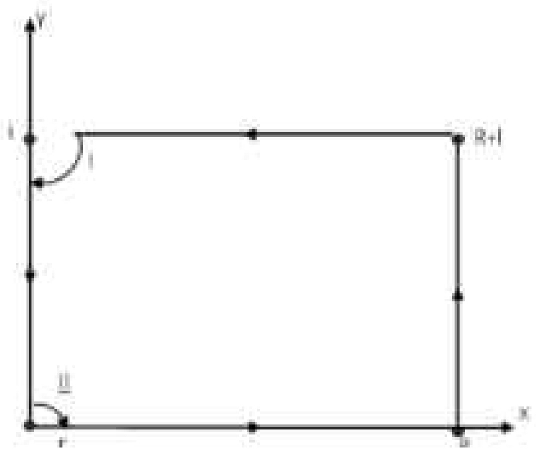
$$\left|e^{-ax^2}\right|=e^{-a(R^2-y^2)}\le e^{\frac{b^2}{4a}}e^{-aR^2};$$

бўлади. Демак, агар $a>0$ бўлса, $erf\infty=1$ ни қўллаб

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}-e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-bx}dx=0$$

ни топамиз. Бу ердан эса ҳақиқий қисмларни таққослашдан якуний ечимга келамиз:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bxdx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}\,(a>0) \qquad (9)$$



8- чизма. Тўртбурчак контури

6-мисол. $\int_0^\infty e^{-\pi x}\frac{\sin ax}{sh\pi x}dx$ Лежандр интегрални ҳисоблаш учун биз $f(z)=\frac{e^{iax}}{e^{2\pi z}-1}$ ёрдамчи функцияни оламиз ва уни 8-чизмада кўрсатилган контур бўйича интеграллаймиз. $f(x+i)=e^{-a}f(x)$ эканлигидан интегралнинг юқори ва қуйи чегараларини бир қилиб бирлаштириш мумкин.

$$\left(1-e-a\right)\int_r^R f(x)dx,$$

$x=R$ кесма бўйича интеграл $R\to\infty$ да 0 га интилади (6-мисолга қаранг). $x=0$ кесмада эса $z=iy$ деб оламиз. Унда Коши теоремасига асосан

$$(1-e^{-a})\int_r^R - i\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}dy}{e^{2\pi iy}-1}+\int_I+\int_{II}+O(\frac{1}{R})=0 \qquad (10)$$

Бу ерда I ва II (8-чизма) айланадаги ёйларни ифодалайди. $z=i$ нуқта яқинида биз

$$f(z)=\frac{e^{iaz}}{e^{2\pi(z-i)}-1}=\frac{e^{-a}+c_1(z-i)+...}{2\pi(z-i)+c_2'(z-i)^2+...}=\frac{e^{-a}}{2\pi}\frac{1}{z-i}+P(z-i)$$

га эгамиз. Бу ерда $P(z-i)$ – $z=i$ нуқтадаги тўғри функция.

I ёйда биз $z=i+re^{i\varphi}$; $dz=rie^{i\varphi}d\varphi$ га эгамиз, унда

$$\int_I=\frac{e^{-a}}{2\pi}\int_0^{-\pi/2}\frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}}+O(r)=-\frac{ie^{-a}}{4}+O(r)$$

бўлади.

$$\int_{II}=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^0 id\varphi+O(r)=-\frac{i}{4}+O(r)$$

га ўхшаб (10) тенглик

$$(1-e^{-a})\int_r^R=i\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}dy+\frac{i}{4}(i+e^{-a})+O(r)+O(\frac{1}{R})$$

кўринишни олади. Бу ерда мавҳум қисмни ажратиб олиб ва уни $r\to 0$, $R\to\infty$ да лимитга ўтайлик.

$$\operatorname{Re}\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}dy}{e^{2\pi iy}-1}=-\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{2}dy=\frac{1}{2a}(e^{-a}-1)+O(r)$$

ни ҳисобга оламиз ва якуний ечимга

$$\int_0^\infty e^{-\pi x}\frac{\sin ax}{sh\pi x}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}}-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^a+1}{e^a-1}-\frac{1}{a}\quad (a>0)\qquad (11)$$

га эга бўламиз.

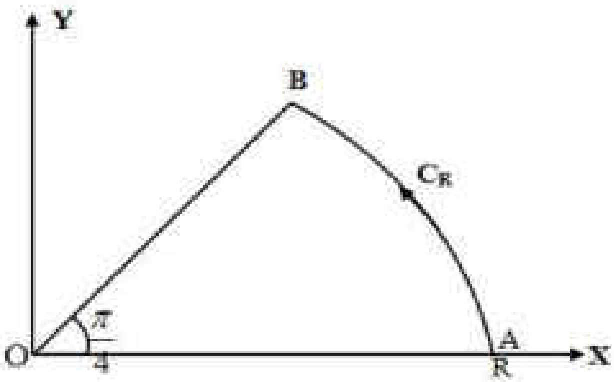
7-мисол. Қуйидаги

$$I_1=\int_0^\infty \cos x^2dx,\ I_2=\int_0^\infty \sin x^2dx$$

Френелли интегралларини ҳисоблаш учун биз $f(z)=e^{iz^2}$ ёрдамчи функцияни танлаб оламиз ва 9-чизмада кўрсатилган контурни танлаймиз. $z^2=\zeta$ ни алмаштиришдан сўнг C_R ёйда биз

$$\int_{C_R} f(z)dz=\frac{1}{2}\int_{C'_{R^2}}\frac{ei\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta}},$$

га эга бўламиз. Бу ерда C'_{R^2} – R^2 радиусли айлананинг тўртдан бир қисмидир.



9-чизма. C_R **ёй**

Демак, Жордан леммасига асосан бу интеграл $R\to\infty$ да 0 га интилади. Коши теоремасига асосан, агар OA га $z=x$ ни, α ни эса OB га қўйсак: $z=t\sqrt{i}$ бўлади. Бундан эса биз

$$\int_0^R e^{ix^2}dx=\sqrt{i}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

га эга бўламиз. $R \to \infty$ да лимитга ўтишда ва $erf\infty = 1$ қийматдан фойдаланиб, биз

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = \sqrt{i}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ни оламиз. Бу ерда ҳақиқий ва мавҳум қисмларни ажратиб олиб

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (12)$$

ни топамиз. Френелли интеграли деб номланувчи

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}dt, \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}dt \quad (13)$$

махсус функциялар боғликдир.

Бу функциялар $t = \tau^2$ да

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} \sin\tau^2 d\tau, \qquad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} \cos\tau^2 d\tau$$

тенглигини беради.

Демак, (12) формулани

$$S(\infty) = C(\infty) = \frac{1}{2} \qquad (14)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Кўп қийматли функцияларни сақловчи интегралларни ҳисоблашни бошлайлик.

8-мисол. Ушбу

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2}$$

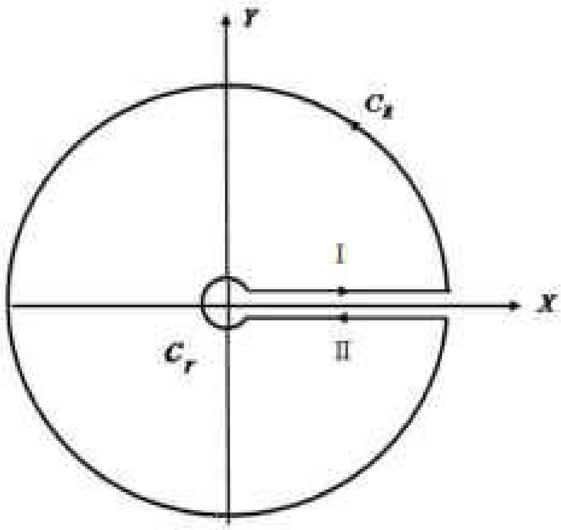
интегрални ҳисоблаш учун

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z_1 + a)^2 + b^2}$$

ёрдамчи функция ва 10-чизмадаги кўрсатилган контурни танлаб оламиз. Бу контурга кирувчи кесимнинг юқори ва қуйи қирғоқларида $\ln^2 x$ дан олинган интеграл ўзаро камаювчи ва бундан эса изланаётган интегрални ҳисоблаш имконияти пайдо бўлади. Контур ичида қуйида берилган чегирмалар билан берилган $f(z)$ функциянинг 2 та биринчи тартибли $z_{1,2}=-a\pm bi$ қутблари ётади ва

$$c'_{-1}=\frac{1}{2bi}\{\ln r+i(\pi-\varphi)\}^2,\quad c''_{-1}=-\frac{1}{2bi}\{\ln r+i(\pi+\varphi)\}^2,$$

бу ерда $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ва $\varphi=arctg\frac{b}{a}$ дир.



10-чизма. Айлана контури

Чегирмалар ҳақидаги теоремани қўллаб,

$$\int_I\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}+\int_{C_R}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}+\int_{II}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}+\int_{c_r}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2}=\frac{\pi}{b}4\varphi(\pi-i\ln r)$$

ни оламиз.

Юқорида айтиб ўтилганга мос ҳолда

$$\int_I\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}+\int_{II}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}=-\int_r^R\frac{4\pi i\ln x-4\pi^2}{(x+a)^2+b^2}dx$$

га эгамиз.

Олдинги мисолдагига кўра

$$\lim_{r\to\infty}\int_{c_r}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2}=0$$

лигини исботлайлик. Унда $r\to 0$, $R\to\infty$ да лимитда

$$4\pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} - 4\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{4\pi\varphi}{b}\left(\pi - i\ln r\right)$$

га эга бўламиз. Бу ердан мавҳум қисмларни таққослашдан биз излаётган интегрални топамиз:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{\varphi \ln r}{b} = \frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b} arctg\frac{b}{a}$$

9-мисол. Худди ўша контур орқали $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$, $(0<a<1)$ Эйлер интеграли ҳам ҳисобланади.

Агар ёрдамчи функция сифатида

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z}$$

олинса, кесманинг қуйи чегараси $f(xe^{2\pi i}) = e^{2a\pi i}f(x)$ дир. Зарурий ҳисоблашлар ва баҳолашларни бажаргач

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad (0<a<1) \quad (15)$$

ни оламиз.

$x = e^t$ алмаштириш бажарилганда бу интеграл худди олдинги 4-мисолдаги интегралга олиб келинади.

МУҲОКАМА

Ўйлаймизки, баъзи ҳисоблаш мураккаб бўлган хосмас интегралларнинг қийматларини чегирмалардан фойдаланган ҳолда ҳисоблаш ва интегралларни ҳисоблашда қулайлик туғдирадиган йўлларини топиш масаласининг ўрганилиши интеграллар назариясининг замонавий концепцияларини осонроқ тушунишга ёрдам беради ва шунингдек, комплекс анализнинг татбиқлари бобининг ривожланишига асос бўлади ҳамда математик анализнинг баъзи масалаларини ҳал қилиш усулларини янада кўпайтиради.

ХУЛОСА

Мазкур ишда асосан, математик анализ курсидаги аҳамият молик бўлган ва математиканинг бошқа соҳалари ривожида муҳим саналган бир қатор интеграллар: Лаплас интеграли, Дирихле интеграли, Пуассон интеграли, Лежандр интеграли, Френели интеграллари чегирмалар ҳақидаги маълумотлар ва тасдиқлардан фойдаланиб қийматлари содда усулда ҳисоблаб кўрсатилган.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Ҳ. Комплекс анализ. Т., “Университет” ,1998.

2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М., “Наука”, 1976.

3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

4. Zhamuratov K., Dodobayev A., Umarov X. Drainage of a Semi-infinite Aquifer in the Presence of Evaporation // International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology, AIP Conf. Proc. 3147, 030036-1 030036-6, https://doi.org/10.1063/5.0210201.

5. Жамуратов, К., Умаров, Х. Р., & Турдимуродов, Э. М. (2024). *О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором* (Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет)

6. Агафонов, А., Умаров, Х., & Душабаев, О. (2023). ДРЕНИРОВАНИЕ ПОЛУ БЕСКОНЕЧНОГО ВОДОНОСНОГО ГОРИЗОНТА ПРИ НАЛИЧИИ ИСПАРЕНИЯ. *Евразийский журнал технологий и инноваций*, *1*(6 Part 2), 99-104.

7. Narjigitov, X., Jamuratov, K., Umarov, X., & Xudayqulov, R. (2023). SEARCH PROBLEM ON GRAPHS IN THE PRESENCE OF LIMITED

INFORMATION ABOUT THE SEARCH POINT. *Modern Science and Research*, *2*(5), 1166-1170.

8. Агафонов, А., Душабаев, О., & Умаров, Х. (2023). СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКЕ. *Евразийский журнал технологий и инноваций*, *1*(6 Part 2), 93-98.

9. Умаров, Х.Р. Решение задачи о притоке к математическому совершенному горизонтальному дренажу / Х.Р.Умаров, К.Жамуратов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – № 3 (8-4). – С. 303–307.

10. ЖАМУРАТОВ, К., УМАРОВ, Х. Р., & АЛИМБЕКОВ, А. Решение одной задачи движения грунтовых вод в области с подвижной границей при наличии испарения. *НАУЧНЫЙ АЛЬМАНАХ Учредители: ООО" Консалтинговая компания Юком*, 81-84.

11. К Жамуратов, ФШ Исматуллаев Об автомодельном решении задачи нестационарного движения грунтовых вод вблизи водохранилища при наличии нелинейного испарения - Научный альманах, 2018

12. К Жамуратов, ХР Умаров ЧИСЛЕННОЕ И АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИНАМИКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНОГО ИСПАРЕНИЯ научных исследований XXI века: теория и практика, 2015.